

01 / Matériaux et élasticité

Références [R1, R2, R3]. Élasticité linéaire, isotropie et petites déformations, sauf relations de déformation vraie.

Relations de base

LOI DE HOOKE

$$\sigma = E\varepsilon$$

DÉFORMATION AXIALE

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

COEFFICIENT DE POISSON

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{trans}}}{\varepsilon_{\text{ax}}}$$

VON MISES

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: contraintes principales.

CONTRAINTE VRAIE

$$\sigma_{\text{true}} = \sigma_{\text{eng}}(1 + \varepsilon_{\text{eng}})$$

Déformation homogène et volume constant ; conversion non valable après striction à partir de la seule déformation globale.

DÉFORMATION VRAIE

$$\varepsilon_{\text{true}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{eng}})$$

DILATATION THERMIQUE

$$\varepsilon = \alpha \Delta T, \quad \Delta L = L \alpha \Delta T$$

Barre en traction

CONTRAINTE NORMALE

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

ALLONGEMENT

$$\Delta L = \frac{FL}{EA}$$

CONTRACTION TRANSVERSALE • CORRIGÉE

$$\Delta s = -\frac{\nu F s}{EA}$$

s : dimension transversale initiale. $\Delta s = s \varepsilon_{\text{trans}}$; le facteur géométrique doit être s , et non la longueur axiale L .

ÉNERGIE ÉLASTIQUE

$$U = \frac{F^2 L}{2EA}$$

Torsion et cisaillement

ARBRE CIRCULAIRE

$$\tau = \frac{Tr}{J}, \quad \theta = \frac{TL}{GJ}$$

T : couple ; r : rayon considéré ; J : moment polaire.

CISAILLEMENT MOYEN

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}$$

Section	Cisaillement maximal
Cercle plein	$(4/3) V/A$
Cercle creux mince	$2 V/A$
Rectangle	$(3/2) V/A$

E : module de Young ; G : module de cisaillement ; α : coefficient de dilatation ; A : aire ; L : longueur.

02 / Assemblages

Références [R4, R5]. Schémas et géométrie d'arrachement page 12 ; contraintes moyennes, hors flexion de l'axe.

Axes et chapes

AXE EN CISAILLEMENT SIMPLE

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A_{\text{pin}}}$$

AXE EN CISAILLEMENT DOUBLE

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{2A_{\text{pin}}}$$

PRESSION DE CONTACT

$$\sigma_{\text{bearing}} = \frac{F}{Dt}$$

D : diamètre de l'axe ; t : épaisseur d'une chape simple.
En double chape, tenir compte du partage de charge.

ARRACHEMENT • GÉOMÉTRIE CORRIGÉE

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{F}{2t(e - D/2)}$$

e : distance centre du trou - bord ; ligament net $\ell = e - D/2$. Modèle conservatif de cisaillement sur deux ligaments. [R5, équation 70]

La résistance de contact ultime est notée comme dépendant du rapport e/D.

Soudures d'angle

CISAILLEMENT MOYEN

$$\tau \approx \frac{F/2}{w(h/\sqrt{2})}$$

Deux cordons parallèles. w : longueur d'un cordon ; h : côté du cordon ; h/√2 : gorge efficace.

Formule obtenue par F / aire totale des deux gorges. Le facteur 0,8 de la photo est supprimé : la résistance admissible dépend du métal d'apport, du procédé et du référentiel. Effort centré et gorge uniforme.

Boulons

PRÉCHARGE PAR COUPLE

$$F_{\text{preload}} = \frac{T}{KD}$$

T : couple de serrage ; D : diamètre ; K : facteur de serrage.

K doit être identifié pour le couple matériau / revêtement / lubrification. Les plages très générales de la photo ne permettent pas de garantir une précharge.

ARRACHEMENT DE TARAUDAGE • ESTIMATION

$$F_{\text{pullout}} \approx \frac{\pi d_p L_{\text{eng}} \tau_u}{2}$$

Estimation NASA RP-1228, p. imprimée 21, avec diamètre au pas d_p . Vérifier les deux matériaux et la géométrie réelle des filets ; le facteur 0,4 de la photo n'est pas retenu.

CISAILLEMENT À LA LIMITE ÉLASTIQUE

$$\tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

Critère de von Mises en cisaillement pur. Ne pas transformer cette relation en prédiction de résistance ultime τ_u .

CHARGE DU BOULON AVANT DÉCOLLEMENT

$$F_b = F_0 + CF_{\text{ext}}, \quad C = \frac{k_b}{k_b + k_m}$$

Modèle axial simplifié de joint préchargé. k_b : raideur du boulon ; k_m : raideur des pièces serrées. [R5]

Notations locales

F : force ; V : effort tranchant ; T : couple ; D : diamètre ; t : épaisseur ; e : distance au bord ; τ_u : résistance ultime en cisaillement.

03 / Poutres et sections

Références [R2, R3]. Six cas vérifiés par intégration de $EI y''' = w$; schémas correspondants page 11.

Flexion et inertie

CONTRAINTE DE FLEXION

$$\sigma_B = \frac{Mc}{I}$$

M : moment fléchissant ; c : distance à la fibre extrême ; I : moment quadratique.

CERCLE PLEIN

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

CERCLE CREUX

$$I = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4)$$

RECTANGLE

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

h est la dimension dans la direction de flexion.

MOMENT POLAIRE : CERCLE PLEIN

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

MOMENT POLAIRE : CERCLE CREUX

$$J = \frac{\pi}{2}(R_o^4 - R_i^4)$$

MOMENT POLAIRE : RECTANGLE

$$J_p = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$$

Moment polaire d'aire ; à distinguer de la constante de torsion d'un rectangle.

Flèches et moments maximaux

CONSOLE • FORCE EN BOUT

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}, \quad M_{\max} = FL$$

CONSOLE • CHARGE RÉPARTIE

$$\delta = \frac{FL^3}{8EI}, \quad M_{\max} = \frac{FL}{2}$$

DEUX APPUIS • FORCE AU CENTRE

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI}, \quad M_{\max} = \frac{FL}{4}$$

DEUX APPUIS • CHARGE RÉPARTIE

$$\delta = \frac{5FL^3}{384EI}, \quad M_{\max} = \frac{FL}{8}$$

DEUX ENCASTREMENTS • FORCE CENTRALE

$$\delta = \frac{FL^3}{192EI}, \quad M_{\max} = \frac{FL}{8}$$

DEUX ENCASTREMENTS • CHARGE RÉPARTIE

$$\delta = \frac{FL^3}{384EI}, \quad M_{\max} = \frac{FL}{12}$$

RAIDEUR DE LA CONSOLE

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Les valeurs de moment sont données en valeur absolue. Les conditions d'appui et la position de la charge font partie de chaque formule.

04 / Structures pressurisées

Référence [R1]. $P = P_{int} - P_{ext}$ pour les parois minces. Cylindre à fonds fermés, libre de se dilater ; schémas page 13.

Coque sphérique mince

CONTRAINTES MEMBRANAIRES

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{PR}{2t}$$

Hypothèse de la photo : $R \gg t$. Contrainte radiale à la face interne : $-P$.

CROISSANCE RADIALE

$$\Delta R = \frac{PR^2(1-\nu)}{2Et}$$

DÉFORMATION CIRCONFÉRENTIELLE

$$\epsilon_{hoop} = \frac{PR(1-\nu)}{2Et}$$

DILATATION THERMIQUE

$$\Delta R = R\alpha\Delta T$$

ÉNERGIE ÉLASTIQUE

$$U = \frac{\pi P^2 R^4 (1-\nu)}{Et}$$

Plaque circulaire encastree

FLÈCHE CENTRALE • PLAQUE MINCE

$$\delta = \frac{3PR^4(1-\nu^2)}{16Et^3}$$

Kirchhoff-Love : plaque mince, élasticité linéaire, flèche petite devant t . Contrôle analytique [V2], décrit page 15.

CONTRAINTE DE FLEXION AU BORD

$$|\sigma_r(R)| = \frac{3}{4}P\left(\frac{R}{t}\right)^2$$

Maximum de la composante radiale de flexion pour les ν usuels ≥ 0 . Ce n'est pas directement une contrainte de von Mises.

Cylindre à fonds fermés

CONTRAINTES CIRCONF. À LA FACE INTERNE

$$\sigma_{\theta,i} = P \frac{R_o^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2}$$

Forme épaisse notée sur la photo, pour pression extérieure nulle.

APPROXIMATION À PAROI MINCE

$$\sigma_{\theta} \approx \frac{PR_i}{t}$$

La fiche indique un rapport R/t supérieur à environ 10.

CONTRAINTES AXIALES : PAROI MINCE

$$\sigma_z \approx \frac{PR_i}{2t}$$

ALLONGEMENT AXIAL

$$\Delta L = \frac{PR_i L}{Et} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

CROISSANCE RADIALE

$$\Delta R = \frac{PR_i^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

À la face interne, $\sigma_r = -P$; la fiche néglige cette contrainte dans l'approximation de paroi mince.

Autres annotations

Les relations de déplacement sont issues de Hooke en contraintes planes [R1]. Le flambement sous pression externe, les ouvertures et les contraintes aux supports nécessitent un modèle distinct. Les notes thermiques et d'arbre en rotation restent exclues, faute d'hypothèses lisibles.

05 / Flambement, fatigue, rupture

Références [R6, R7]. Euler contrôlé par ses conditions aux limites [V3] ; fissures illustrées page 13.

Flambement d'Euler

CHARGE CRITIQUE

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(K_e L)^2}$$

Colonne droite, élancée, élastique, charge centrée ; I sur l'axe faible. K_e : coefficient de longueur efficace.

Conditions aux extrémités	K_e
Articulé - articulé	1
Articulé - encastré	0,699
Encastré - encastré	0,5
Encastré - libre	2

$n = 1/K_e^2$: cas encastré-articulé $\approx 2,046$. Le seul critère $L/r > 10$ de la photo est insuffisant : la contrainte critique doit rester dans le domaine élastique, et les imperfections doivent être traitées.

Fatigue

LCF : fatigue à faible nombre de cycles, avec plasticité.
HCF : fatigue à grand nombre de cycles, principalement élastique.

MANSON • MÉTHODE DES PENTES UNIVERSELLES

$$\Delta \varepsilon \approx 3.5 \frac{\sigma_u}{E} N_f^{-0.12} + \left[\ln \left(\frac{1}{1-RA} \right) \right]^{0.6} N_f^{-0.6}$$

Relation empirique identifiée [R7]. $\Delta \varepsilon$: plage totale, pas amplitude ; N_f : cycles à rupture ; RA en fraction. À remplacer par des données de fatigue du matériau pour un dimensionnement.

Un seuil ΔK_{th} se définit pour des conditions d'essai données. L'absence de croissance mesurable sous ce seuil n'est pas une garantie générale, notamment pour les fissures courtes.

Mécanique de la rupture

PLAQUE LARGE • FISSURE CENTRALE

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

PLAQUE LARGE • FISSURE DE BORD

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$$

PLAQUE FINIE • FISSURE CENTRALE

$$K_I \approx \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{\cos(\pi a/(2W))}}$$

Fissure traversante de longueur $2a$, largeur totale de plaque $2W$, traction uniforme éloignée ; approximation de largeur finie. [R6, tableau 1]

TROU CIRCULAIRE DANS UNE PLAQUE LARGE

$$K_t = 3, \quad \sigma_{\max} = 3\sigma_{\infty}$$

Solution de Kirsch, traction uniaxiale, plaque isotrope élastique large. σ_{∞} est basée sur la section brute éloignée. [R8]

Marge de sécurité

MARGE DE SÉCURITÉ

$$MS = \frac{F_{allow}}{FS F_{applied}} - 1$$

FS appliqué une seule fois : si F_{allow} est déjà divisé par FS, ne pas réappliquer ce même facteur. [R5]

Les résistances admissibles et facteurs de sécurité doivent venir du référentiel du projet. Cette mise au propre conserve les notes de la source ; elle ne définit pas un référentiel de calcul.

06 / Fluides et gaz

Références [R9, R10, R11]. Pressions absolues en gaz parfait et en cavitation ; v est la vitesse moyenne.

Écoulement incompressible

CONTINUITÉ

$$\dot{m} = \rho A v = \text{constant}$$

BERNOULLI

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constant}$$

Permanent, incompressible, non visqueux ; le long d'une ligne de courant, sans pompe ni turbine.

ÉNERGIE EN ÉCOULEMENT PERMANENT

$$C_p(T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

Gaz avec C_p constant, adiabatique, sans travail d'arbre ; utiliser $h_2 - h_1$ à la place de $C_p \Delta T$ dans le cas général.

REYNOLDS

$$Re_D = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

ν : viscosité cinématique, distinguée du coefficient de Poisson.

DÉBIT PAR ORIFICE

$$\dot{m} = C_D A \sqrt{2 \rho \Delta P}$$

Écoulement incompressible ; C_D : coefficient de décharge.

PERTE DE CHARGE LAMINAIRE

$$\Delta P = f_D \frac{L \rho v^2}{2}, \quad f_D = \frac{64}{Re_D}$$

Conduite circulaire, écoulement pleinement développé. Facteur de Darcy ; facteur de Fanning = $f_D/4$.

NOMBRE DE CAVITATION • PRÉCISÉ

$$\sigma_{\text{cav}} = \frac{P_{\text{ref}} - P_v(T)}{\rho v_{\text{ref}}^2 / 2}$$

P_v : pression de vapeur. Début de cavitation dépendant de la géométrie ; suppression du seuil universel 0,2-1,5. [R11]

Gaz parfait et écoulement compressible

ÉQUATION D'ÉTAT

$$P = \rho R T, \quad R = \frac{R_u}{MW}$$

Adiabatique : sans échange de chaleur.

Isentropique : adiabatique et réversible.

RELATIONS ISENTROPIQUES

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

PRESSION TOTALE • GAZ COMPRESSIBLE

$$\frac{P_t}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Décélération isentropique d'un gaz calorifiquement parfait. Pour un liquide incompressible : $P_t = P + \rho v^2/2$.

NOMBRE DE MACH

$$M = \frac{v}{\sqrt{\gamma R T}}$$

ÉTRANGLEMENT • TUYÈRE CONVERGENTE

$$\frac{P_b}{P_t} \leq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

P_b : pression aval ; col sonique $M = 1$. Une tuyère convergente-divergente demande une analyse des régimes et des chocs.

$\gamma = C_p/C_v$. Modèle monoatomique idéal : 5/3 ; diatomique sans excitation vibrationnelle : 7/5. γ varie avec T et la composition. Pour un gaz réel : $P = Z \rho R T$; pas de limite P/T universelle.

07 / Propulsion, thermique et orbites

Références [R10, R12, R13, R14]. Gaz parfait, tuyère idéale et écoulement isentropique ; schéma page 14.

Propulsion fusée

POUSSÉE

$$T = \dot{m}V_e + (P_e - P_\infty)A_e$$

FORMES ÉQUIVALENTES

$$T = C_F P_c A_t = I_{sp} \dot{m} g_0$$

TERME DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$C_{F,m} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_c}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}$$

COEFFICIENT TOTAL • CORRIGÉ

$$C_F = C_{F,m} + \frac{P_e - P_\infty}{P_c} \frac{A_e}{A_t}$$

Au vide : $P_\infty = 0$; le terme de pression de sortie ne disparaît pas.

ÉQUATION DE TSIOLKOVSKI

$$\Delta V = v_{\text{eff}} \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

$v_{\text{eff}} = I_{sp} g_0$, constant. Vitesse effective, incluant la poussée de pression ; pertes de gravité et traînée exclues.

RELATION AIRE-MACH

$$\frac{A_t}{A} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \frac{M}{[1 + (\gamma-1)M^2/2]^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))}}$$

Mécanique orbitale

ORBITE CIRCULAIRE / LIBÉRATION

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{\mu_g}{r}}, \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu_g}{r}}$$

r : distance au centre du corps ; $\mu_g = GM$. Modèle à deux corps, sans atmosphère.

PÉRIODE D'ORBITE CIRCULAIRE

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu_g}}$$

Transfert thermique

CONDUCTION

$$\dot{Q} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

CONVECTION

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty)$$

RAYONNEMENT

$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma_{SB} A (T_s^4 - T_\infty^4)$$

Petite surface grise dans une grande enceinte isotherme, facteur de vue ≈ 1 ; températures en kelvins. $\sigma_{SB} \approx 5,670374419 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

RÉSISTANCE THERMIQUE

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{\text{thermal}}}$$

RÉSISTANCES ÉLÉMENTAIRES

$$R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA}, \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA}$$

NUSSELT ET BIOT

$$Nu = \frac{hL}{k_{\text{fluid}}}, \quad Bi = \frac{hL}{k_{\text{solid}}}$$

PRANDTL ET DIFFUSIVITÉ

$$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_{th}}, \quad \alpha_{th} = \frac{k}{\rho C_p}$$

Bilan thermique : entrées + génération – sorties = accumulation. Pour Nu et Bi , préciser la longueur caractéristique propre à la géométrie.

Notations propulsion / orbites

c, t, e : chambre, col, sortie de tuyère. I_{sp} en secondes ; $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ pour sa définition. μ_g : paramètre gravitationnel, à distinguer de la viscosité μ . Le temps est noté τ .

08 / Dynamique et vibrations

Références [R15, R16]. ms et mb : masses totales du ressort et de la poutre ; schémas et courbes page 14.

Oscillateur masse-ressort-amortisseur

ÉQUATION DU MOUVEMENT

$$F(\tau) = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

FORME NORMALISÉE

$$\frac{F(\tau)}{m} = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x$$

PULSATION ET FRÉQUENCE

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = 2\pi f$$

PULSATION AMORTIE

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

ζ : taux d'amortissement ; ω_n en rad/s ; f en Hz.

AMPLIFICATION APPROX. PRÈS RÉSONANCE

$$Q \approx \frac{1}{2\zeta}$$

Faible amortissement. La photo indique que doubler ζ divise approximativement l'amplification par deux.

ENVELOPPE TEMPORELLE

$$A \exp(-\zeta\omega_n\tau)$$

DÉCROISSANCE DE L'ENVELOPPE À 1 %

$$\tau_{1\%} = \frac{\ln(100)}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n}$$

RAPPORT ENTRE PICS DU MÊME SIGNE

$$\frac{A_{j+1}}{A_j} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Pour deux extrema voisins de signes opposés, comparer leurs valeurs absolues : exposant avec π , et non 2π .

Fréquences propres indiquées

MASSE SUR RESSORT SANS MASSE

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

MASSE SUR RESSORT MASSIF

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m_s/3}}$$

CONSOLE • RAYLEIGH, MASSE EN BOUT

$$f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{(m + (33/140)m_b)L^3}}$$

Forme statique comme fonction d'essai ; $33/140 \approx 0,236$, arrondi 0,24 sur la photo. [V4]

DEUX APPUIS • RAYLEIGH, MASSE CENTRALE

$$f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EI}{(m + (17/35)m_b)L^3}}$$

$17/35 \approx 0,486$ remplace le mélange d'approximations de la photo. [V4]

ENCASTRÉ-ARTICULÉ • CORRIGÉ

$$f_1 = \frac{15.418}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m_b L^3}}$$

Poutre uniforme seule, Euler-Bernoulli. Coefficient 9,5 incorrect pour les appuis indiqués. [R16]

DEUX ENCASTREMENTS • RAYLEIGH

$$f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{192EI}{(m + (13/35)m_b)L^3}}$$

Masse au centre ; $13/35 \approx 0,371$. Ces trois formules Rayleigh sont des estimations du premier mode. [V4]

ζ doit être mesuré ou justifié pour le mode étudié. Les plages 1 %, 2-3 % et 5-10 % de la photo ne constituent pas une propriété générale des matériaux.

09 / Maths et énergie

Relations élémentaires contrôlées par développement limité, intégration géométrique et analyse dimensionnelle [V5].

Approximations numériques

PETITS ANGLES

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1$$

θ en radians. À 15° : erreur relative $\approx 1,15\%$ pour $\sin \theta \approx \theta$ et $\approx 3,53\%$ pour $\cos \theta \approx 1$. Choisir selon la précision requise.

DÉVELOPPEMENTS DU SINUS / COSINUS

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots, \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots$$

BINÔME AU PREMIER ORDRE

$$(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

INVERSES AU PREMIER ORDRE

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon, \quad \frac{1}{1 - \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$$

LOI DES COSINUS

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Géométrie

COURONNE CIRCULAIRE

$$A = \pi(R_o^2 - R_i^2) \approx 2\pi R t$$

SURFACE LATÉRALE D'UN CYLINDRE

$$A = \pi D L$$

AIRE D'UNE ELLIPSE

$$A = \pi a b$$

SURFACE D'UNE SPHÈRE

$$A = 4\pi R^2$$

VOLUME D'UNE COQUE SPHÉRIQUE

$$V = \frac{4\pi}{3}(R_o^3 - R_i^3)$$

Énergie

TRAVAIL

$$W = \int F dx$$

ÉNERGIE CINÉTIQUE

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

ÉNERGIE POTENTIELLE

$$E_p = mgh$$

RESSORT

$$E_s = \frac{1}{2} k x^2$$

CHALEUR SENSIBLE

$$Q = m C_p \Delta T$$

Sans changement de phase, C_p constant ; chauffage à pression constante, sans autre travail.

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

$$E = V I \tau$$

Tension et courant constants. En alternatif ou si variables : $E = \int v(\tau) i(\tau) d\tau$.

RENDEMENT

$$\eta = \frac{E_{\text{output}}}{E_{\text{input}}}$$

Relations exclues après vérification

Restent en annexe uniquement : contrainte thermique du cylindre, dilatation d'arbre en rotation, formule locale de tension de chambre, équations masquées de volume de contrôle et tableaux de facteurs de sécurité. Leur géométrie, référentiel ou hypothèses ne sont pas établis.

10 / Checklist d'analyse

Traduction de la liste imprimée sur la photo. À utiliser comme liste de relecture du modèle.

Préparer et définir le modèle

- ☐ Définir les objectifs de l'analyse et commencer par un schéma des forces.
- ☐ Estimer les résultats par calculs à la main et vérifier les unités à chaque étape.
- ☐ Obtenir les propriétés matériaux et facteurs de sécurité auprès d'une source approuvée.
- ☐ Lister toutes les charges, températures, accélérations et nombres de cycles.
- ☐ Évaluer le cas le plus défavorable en charges et en conditions thermiques, y compris les transitoires.
- ☐ Vérifier les données matériaux sur toute la plage de températures.
- ☐ Inclure les facteurs de réduction thermique et ceux associés aux soudures et pièces moulées.
- ☐ Adapter les charges aux hypothèses de symétrie ou de périodicité.
- ☐ Prendre en compte la masse de fluide ou de gaz dans les conduites.
- ☐ Inclure les efforts de purge ou de décharge pertinents dans le schéma des forces.
- ☐ Prendre en compte les tolérances défavorables et les efforts de montage.

Lecture du document

Les corrections remplacent les formules de la photo. Les hypothèses sont indiquées et les relations non établies exclues. Schémas pages 11 à 14 ; corrections page 15 ; références page 16.

Vérifier et exploiter les résultats

- ☐ Prévoir des rayons / congés suffisants et un maillage qui capture les concentrations de contraintes. Les 3 éléments sur le rayon suggérés par la photo ne remplacent pas une convergence locale.
- ☐ Effectuer une étude de convergence du maillage.
- ☐ Amplifier la déformée pour vérifier les conditions aux limites et les liaisons.
- ☐ Vérifier la résistance au grippage des pièces en glissement.
- ☐ Utiliser les contraintes principales pour les matériaux fragiles ; la fiche mentionne un allongement inférieur à 3 %.
- ☐ Évaluer le fluage pour les charges prolongées à haute température.
- ☐ Corriger les calculs de fatigue pour la température et inclure les vibrations.
- ☐ Vérifier les facteurs de sécurité requis lorsqu'une défaillance peut exposer des personnes.
- ☐ Évaluer les marges en limite élastique, rupture, allongement, stabilité, fatigue et ouverture de joints.
- ☐ Recouper les résultats avec les calculs à la main : équilibre, thermique, déformation, contrainte circonférentielle et masse.
- ☐ Ancrer le modèle sur des mesures / essais, obtenir une revue par un pair, puis archiver entrées, hypothèses et résultats.

11 / Schémas de flexion

Appuis et charges des six cas de la page 3. F en N ; w en N/m ; flèches maximales en valeur absolue.

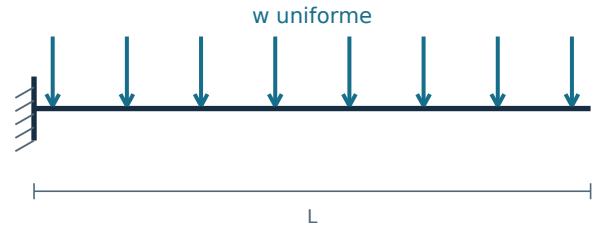
Console • force en bout



$$\delta_{\max} = FL^3/(3EI)$$

$$|M|_{\max} = FL$$

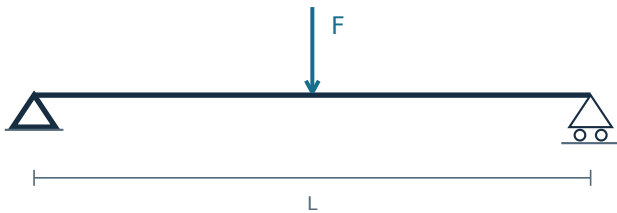
Console • charge uniforme



$$\delta_{\max} = wL^4/(8EI)$$

$$|M|_{\max} = wL^2/2$$

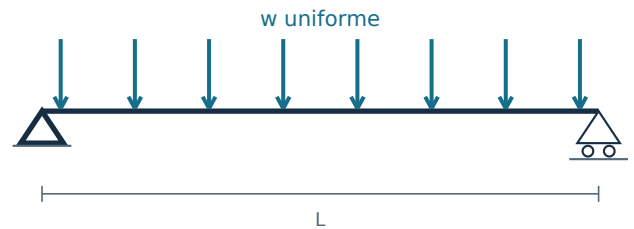
Deux appuis • force centrale



$$\delta_{\max} = FL^3/(48EI)$$

$$|M|_{\max} = FL/4$$

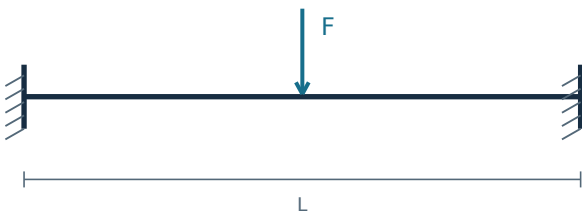
Deux appuis • charge uniforme



$$\delta_{\max} = 5wL^4/(384EI)$$

$$|M|_{\max} = wL^2/8$$

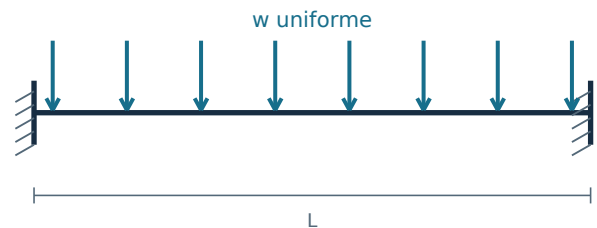
Deux encastrements • force centrale



$$\delta_{\max} = FL^3/(192EI)$$

$$|M|_{\max} = FL/8$$

Deux encastrements • charge uniforme



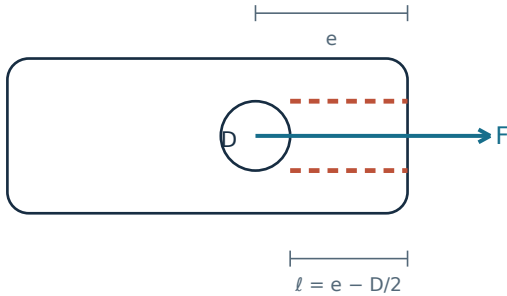
$$\delta_{\max} = wL^4/(384EI)$$

$$|M|_{\max} = wL^2/12$$

12 / Assemblages et flambement

Schémas des pages 2 et 5. Rouge : plans de cisaillement idéalisés ; bleu : effort ou boulon.

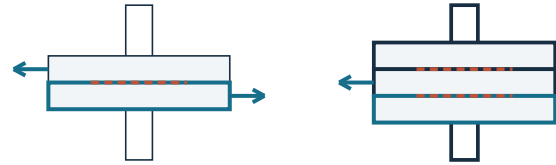
Ligament net d'une chape



Épaisseur hors plan : t

$$A_{\text{shear}} = 2t(e - D/2)$$

Axe : simple / double cisaillement

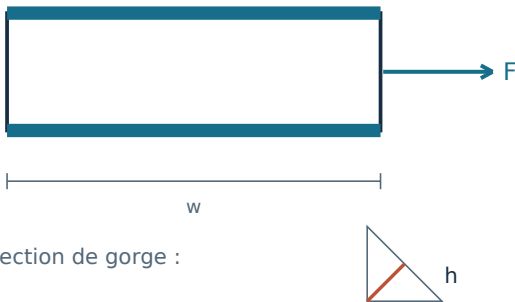


1 plan

2 plans

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{pin}}} \quad \tau = \frac{F}{2A_{\text{pin}}}$$

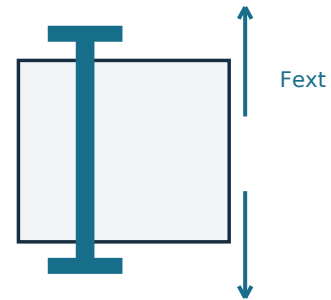
Deux cordons parallèles



Section de gorge :

Gorge $a = h/\sqrt{2}$; aire totale = $2wa$

Joint préchargé : partage axial



Boulon : k_b ; pièces serrées : k_m

$$F_b = F_0 + \frac{k_b}{k_b + k_m} F_{\text{ext}}$$

Euler : la longueur efficace change avec les appuis



Articulé / articulé

$$K_e = 1$$



Encastré / articulé

$$K_e = 0,699$$



Encastré / encastré

$$K_e = 0,5$$



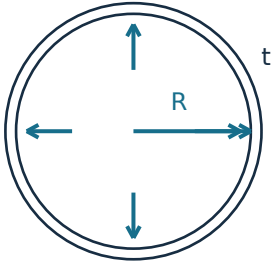
Encastré / libre

$$K_e = 2$$

13 / Réservoirs et fissures

Géométries des pages 4 et 5. Bleu : sollicitations ; rouge : fissures ou concentration de contrainte.

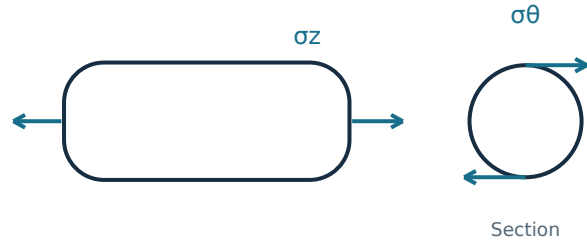
Sphère mince



$$\Delta P = P_{int} - P_{ext}$$

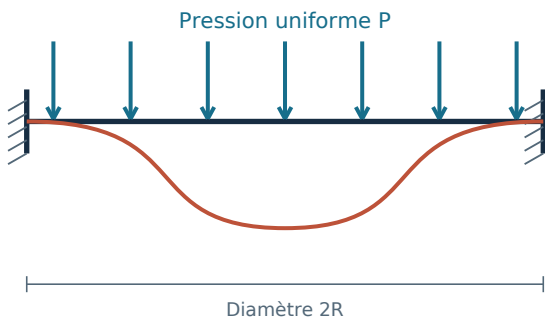
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\Delta P R}{2t}$$

Cylindre mince à fonds fermés



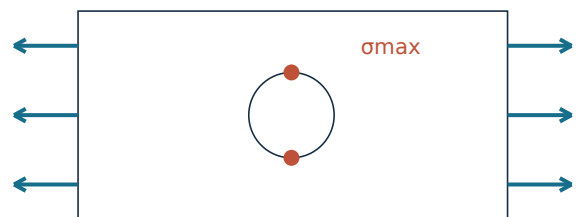
$$\sigma_\theta = \frac{\Delta P R}{t}, \quad \sigma_z = \frac{\Delta P R}{2t}$$

Plaque circulaire encastée



Déformée amplifiée ; $\delta \ll t$

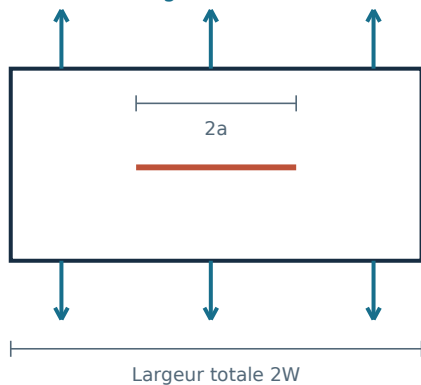
Trou circulaire : solution de Kirsch



$$\sigma_{\max} = 3\sigma_\infty$$

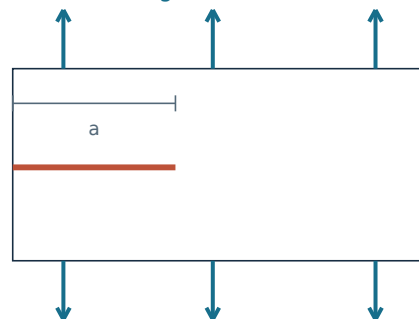
Plaque large ; traction uniaxiale

Fissure centrale : longueur 2a



a = demi-longueur de fissure ; $a < W$

Fissure de bord : longueur a



$$K_I \approx 1.12\sigma_\infty\sqrt{\pi a}$$

Plaque large ; fissure traversante

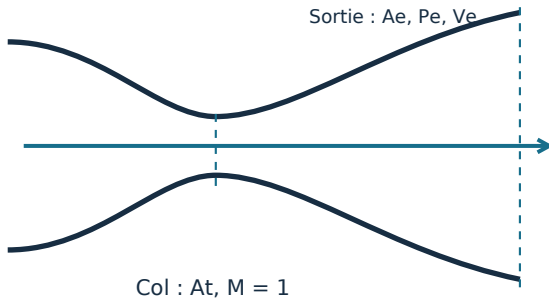
14 / Tuyère et oscillateur

Repères des pages 7 et 8. Courbes calculées à partir du modèle masse-ressort-amortisseur linéaire.

Tuyère convergente-divergente

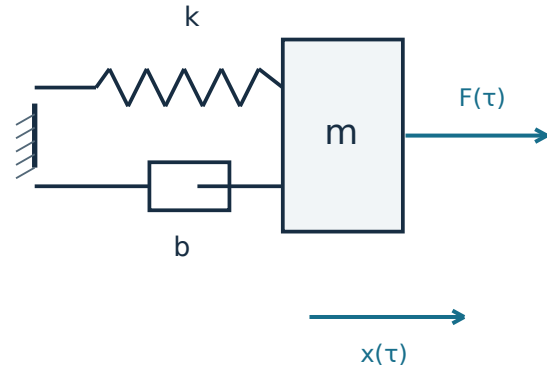
Chambre : P_c, T_c

Sortie : A_e, P_e, V_e



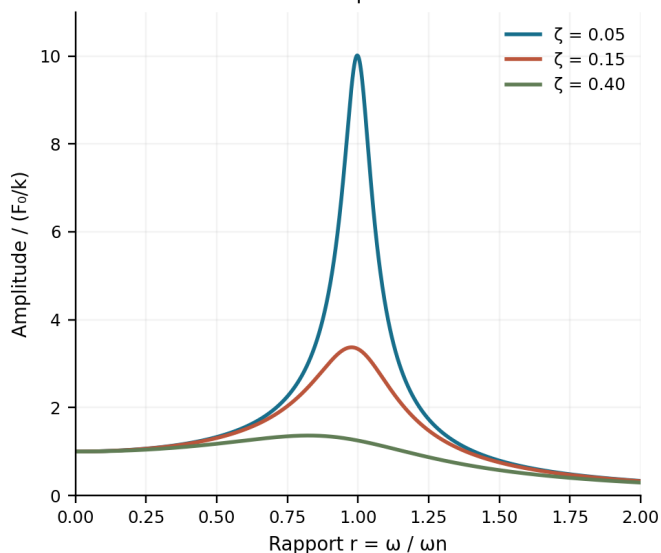
$$T = \dot{m}V_e + (P_e - P_\infty)A_e$$

Oscillateur à un degré de liberté

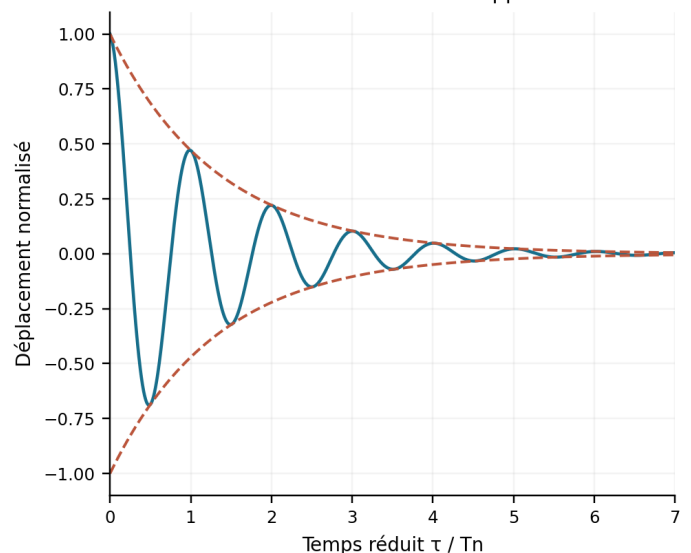


$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Force harmonique : résonance



Vibration libre : enveloppe



$$\frac{A}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Le pic se situe à $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ si $\zeta < 1/\sqrt{2}$. À $r = 1$, l'amplification vaut exactement $1/(2\zeta)$. L'enveloppe de vibration libre est proportionnelle à $\exp(-\zeta\omega_n\tau)$.

15 / Corrections et contrôles

Bilan : références techniques primaires, calculs analytiques et contrôles dimensionnels.

Corrections appliquées

Contraction transversale

Le facteur géométrique est la dimension s , pas L : $\Delta s = -\nu F s / (EA)$.

Arrachement de chape

Si e part du centre du trou, utiliser le ligament net $e - D/2$. $F/(2et)$ suppose une autre définition de e .

Résistance au cisaillement

$\sigma_y/\sqrt{3}$ décrit la limite élastique de von Mises ; pas la résistance ultime de tous les matériaux.

Flambement

$K_e = 0,699$ pour encastré-articulé. Le seul critère $L/r > 10$ ne valide pas Euler.

Pression totale

Séparation des formes incompressible et compressible isentropique.

Coefficient de poussée

Ajout de $(P_e - P_\infty)A_e/(P_c A_t)$, également présent au vide quand $P_e > 0$.

Fréquence encastré-articulé

Le coefficient de poutre uniforme est 15,418, au lieu de 9,5.

Fatigue et vibrations

Méthode empirique des pentes universelles de Manson identifiée ; convention des pics précisée.

Contrôles indépendants réalisés

V1 • Poutres

Intégration de $EI y'''' = w$, conditions d'appui et continuité au point de force : les 6 flèches et 6 moments concordent.

V2 • Plaque circulaire

$\delta(r) = P(R^2 - r^2)^2/(64D)$, $D = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$.

Vérification de $D\nabla^4 \delta = P$, $\delta(R) = \delta'(R) = 0$ et du moment radial au bord.

V3 • Euler

Résolution de $\tan q = q$: $q = 4,493409$; $K_e = \pi/q = 0,699156$.

V4 • Vibrations de poutres

Masses effectives intégrées : 33/140, 17/35 et 13/35.

Racine de $\tan \beta = \tanh \beta$: $\beta^2 = 15,418206$.

V5 • Relations élémentaires

Contrôle par définitions, développements limités, intégrales géométriques et unités. Erreurs à 15° calculées.

V6 • Propulsion

Terme de quantité de mouvement retrouvé en combinant le débit étranglé et la vitesse de sortie isentropique NASA.

Données propres au projet

Résistances admissibles, précharge réelle, fatigue, facteurs de sécurité, seuil de cavitation et amortissement restent à justifier. Les valeurs génériques non établies ont été retirées ; les passages non identifiables restent dans la photo source.

16 / Références

Sources consultées le 2 octobre 2026. Les numéros sont repris sur les pages thématiques ; liens cliquables.

[R1] MIT • Pressure Vessels

Contraintes minces et Hooke biaxial.

[Ouvrir la référence](#)

[R2] MIT • Elastic Response

Traction, contrainte, déformation et élasticité.

[Ouvrir la référence](#)

[R3] MIT • Beam Displacements

Intégration de l'équation de déformée.

[Ouvrir la référence](#)

[R4] NASA • Fastener Design Manual

RP-1228, Barrett, 1990. Couple et taraudages.

[Ouvrir la référence](#)

[R5] NASA • Preloaded Joint Analysis

TM-106943, Chambers, 1995. Précharge, arrachement, contact et marges.

[Ouvrir la référence](#)

[R6] MIT • Fracture Mechanics

Roylance. Facteurs d'intensité, tableau 1.

[Ouvrir la référence](#)

[R7] NASA • Universal slopes

Rapport 19790018258. Relation de Manson.

[Ouvrir la référence](#)

[R8] MIT • Closed-Form Solutions

Kirsch : concentration autour d'un trou.

[Ouvrir la référence](#)

Flexion : complément de R3

MIT : Stresses in Beams

[R9] CalculiX • Gas Pipe

Documentation du logiciel : Reynolds et frottement ; copie hébergée au MIT.

[Ouvrir la référence](#)

[R10] NASA Glenn • Isentropic Flow

Pression totale, son et aire-Mach.

[Ouvrir la référence](#)

[R11] KSB • Cavitation

Pression de vapeur et cavitation.

[Ouvrir la référence](#)

[R12] NASA Glenn • Rocket Thrust

Débit étranglé, vitesse et poussée.

[Ouvrir la référence](#)

[R13] MIT • Energy and Power Flow

Bilans et résistances thermiques.

[Ouvrir la référence](#)

[R14] NASA • Kepler's Third Law

Orbites circulaires, période et libération.

[Ouvrir la référence](#)

[R15] MIT • Logarithmic decrement

Cours 1.581 : oscillateur et décroissance.

[Ouvrir la référence](#)

[R16] Tom Irvine • Beam frequencies

Vibrationdata, révision U, 2022.

[Ouvrir la référence](#)

Compléments thermiques

MIT : conduction, convection, Biot

MIT : Stefan-Boltzmann

NIST : constante de Stefan-Boltzmann

3